MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE L'EMPLOYABILITE **(DGESE)**

Institut National Polytechnique
Félix Houphouët – Boigny
SERVICE DES CONCOURS

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

Concours STIC/GIC session 2016

Composition : **Mathématiques 3** (algèbre)

Durée : **4 Heures**

NB : **La présentation, la propreté, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. L'usage des calculatrices scientifiques et de tout matériel électronique est autorisé. Si au cours de l'épreuve le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.**

Exercice :

On considère l'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}$ des matrices symétriques réelles définies positives. Soit A dans $\mathcal{S}_n^{++}$.

1) **a.** Montrer qu'il existe une unique matrice B dans $\mathcal{S}_n^{++}$ telle que $B^2 = A$.
On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A.

b. Montrer qu'il existe un unique polynôme P, de degré inférieur ou égal à $p-1$ tel que :

$$\forall i \in [\![0, p]\!], \quad P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}.$$

Exprimer ce polynôme en fonction des λ_i.

c. En déduire que la matrice B de $\mathcal{S}_n^{++}$, telle que $B^2 = A$, est :

$$B = \sum_{i=1}^{p} \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i - \lambda_j)} \prod_{j\neq i}(A - \lambda_j I).$$

d. Calculer B quand $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2) **a.** Soit $u_0 = 1$, a un réel strictement positif et la suite u définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Montrer que, si A et B sont deux matrices symétriques réelles telles que $AB = BA$, il existe une matrice orthogonale Q telle que ${}^tQAQ$ et ${}^tQBQ$ soient diagonales.

3) Soit M une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}$ telle que $AM = MA$.

a. Justifier que M est inversible et que M^{-1} est dans $\mathcal{S}_n^{++}$.

b. Soit $N = \dfrac{1}{2}(M + M^{-1}A)$. Montrer que $AN = NA$ et que N est dans $\mathcal{S}_n^{++}$.
On définit alors la suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{S}_n^{++}$ par :

$$\begin{cases} B_0 = I_n \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad B_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(B_k + B_k^{-1}A\right) \end{cases}$$

c. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q telle que, pour tout k de $\mathbb{N}$, $Q^{-1}B_kQ$ soit une matrice diagonale D_k qu'on notera :

$$D_k = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2^{(k)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

d. Étudier la convergence de la suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.

Problème :

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$) l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes dont les cœfficients appartiennent à $\mathbb{C}$ (respectivement à $\mathbb{R}$, à $\mathbb{Z}$). La matrice identité de taille n est notée I_n.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A et noté $Sp(A)$.
On dit que A est **d'ordre fini** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^k = I_n$.
Si A est d'ordre fini, le plus petit entier strictement positif k tel que $A^k = I_n$ est appelé **ordre** de A et noté $o(A)$.

Partie A : préliminaires

1) Cette question consiste en des rappels de théorèmes du cours.

a. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$.

i- Donner une condition suffisante sur P pour que A soit trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

ii- Donner une condition suffisante sur P pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, $P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$. Que deviennent les conditions précédentes lorsque l'on s'intéresse à la trigonalisation ou à la diagonalisation de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

2) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'ordre fini. On pose $o(B) = b$.

a. Démontrer que B est inversible.

b. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $B^k = I_n$ si et seulement si b divise k.

c. Démontrer que les valeurs propres de B sont des racines b-ièmes de l'unité.

d. Démontrer que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ses valeurs propres sont notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On suppose que C est diagonalisable et que pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, λ_i est une racine n_i-ième de l'unité pour un certain entier n_i.
Pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on note k_i le plus petit entier strictement positif tel que $\lambda_i^{k_i} = 1$.

a. Démontrer que C est d'ordre fini et que son ordre divise le PPCM de $k_1, \dots, k_n$.

b. Démontrer que $o(C)$ est le PPCM de $k_1, \dots, k_n$.

Partie B : matrices d'ordre fini à cœfficients réels

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'ordre fini. Le but est de démontrer que cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et de déterminer le spectre de A dans $\mathbb{C}$.

1) Démontrer que si toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont réelles, alors $Sp(A) \subseteq \Big\{ -1, 1 \Big\}$.

2) On suppose que 1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.

a. Justifier qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et a, b, c éléments de $\mathbb{R}$ tels que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. On pose $B = P^{-1}AP$. Démontrer que B est d'ordre fini.

c. Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$B^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & \dfrac{k(k-1)}{2}ac + kb \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d. En déduire que $A = I_3$.

3) Énoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque -1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.

4) On suppose que -1 est valeur propre simple de A et que 1 est valeur propre double de A.

a. Justifier qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et a, b, c éléments de $\mathbb{R}$ tels que :

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. On pose $C = Q^{-1}AQ$.

Démontrer qu'il existe trois suites de nombres réels $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel k :

$$C^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 1 & \gamma_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définira ces suites à l'aide de relations de récurrence.

c. Donner une expression de γ_k pour tout $k \geqslant 0$.

d. En déduire que $c = 0$.

e. En déduire que C et A sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

5) Énoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque -1 est valeur propre double de A et 1 est valeur propre simple de A.

6) On suppose que A admet dans $\mathbb{C}$ au moins une valeur propre non réelle.

a. Démontrer qu'il existe $\theta \in 2\pi\mathbb{Q} \setminus \pi\mathbb{Z}$ tel que $Sp(A) = \left\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\right\}$ ou $\left\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\right\}$.
On pourra considérer le polynôme caractéristique de A.

b. Démontrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

7) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que A est d'ordre fini si, et seulement si, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et qu'il existe $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$ tel que $Sp(A) = \left\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\right\}$ ou $\left\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\right\}$.

Partie C : matrices d'ordre fini à cœfficients entiers

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, d'ordre fini. D'après la **partie B**, son spectre dans $\mathbb{C}$ est de la forme $Sp(A) = \left\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\right\}$ ou $\left\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\right\}$, où $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$.

1) Démontrer que $2\cos\theta \in \mathbb{Z}$. (*On pourra considérer la trace de A.*)

2) Donner les valeurs possibles pour θ.

3) Donner les différents spectres dans $\mathbb{C}$ possibles pour A puis démontrer que $o(A) \in \left\{1, 2, 3, 4, 6\right\}$.

4) On cherche maintenant à construire des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ de chaque ordre.

a. Donner des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ d'ordre 1 et 2.

b. **i-** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le polynôme caractéristique de :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \end{pmatrix}.$$

ii- Construire une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ dont les valeurs propres sont $1, e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{-2i\pi}{3}}$.
Démontrer que cette matrice est d'ordre 3.

iii- Construire des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ d'ordre 4 et d'ordre 6.

Fin de l'énoncé.